

7.7] #5 $x' = Ax$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $\vec{z}^1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{z}^2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$

↑
eigenvalues

$$T = \begin{bmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{Dt} &= \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi(t) = T e^{Dt} T^{-1} = -\frac{i}{2} T \begin{bmatrix} e^{it} & e^{it(-2+i)} \\ -e^{-it} & e^{-it(2+i)} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} e^{it(2+i)} - e^{it(2-i)} & e^{it(-2+i)(2+i)} + e^{-it(2+i)(2-i)} \\ e^{it} - e^{-it} & e^{it(-2+i)} + e^{-it(2+i)} \end{bmatrix} \\ e^{it} &= \cos t + i \sin t \\ &= -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} 2i(\cos t + 2 \sin t) & 2i(-5 \sin t) \\ 2i \sin t & 2i(\cos t - 2 \sin t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t + 2 \sin t & -5 \sin t \\ \sin t & \cos t - 2 \sin t \end{bmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

#9 $A = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 1-1 \\ -8 & -5-3 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & -7 & -2 \end{bmatrix}$ $T^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 18 & 13 & 1 \\ -6 & -3 & -3 \\ 12 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \Phi = T e^{Dt} T^{-1}$$

$$= \frac{1}{12} T \begin{bmatrix} 18e^{2t} & 13e^{2t} & e^{2t} \\ -6e^{-2t} & -3e^{-2t} & -3e^{-2t} \\ 12e^{-t} & 4e^{-t} & 4e^{-t} \end{bmatrix} = \text{as given on page 9 of solution.} \checkmark$$