

Zum Mechanismus der Widerstandsänderung im Magnetfeld.

Von

A. NEDOLUHA und K. M. KOCH, Wien.

Mit 5 Figuren im Text.

(Eingegangen am 17. April 1952.)

Das Zweibändermodell, das mehrfach zur Ableitung von Beziehungen für die Widerstandsänderung im Magnetfeld und den HALL-Effekt verwendet worden ist, läßt sich — wie hier gezeigt wird — durch ein als Ersatzschema aufzufassenden „Zweischichtenmodell“ ersetzen. Die größere Anschaulichkeit dieses Ersatzschemas für Leiter mit zusammengesetztem Leitungsmechanismus gestattet eine bequeme Erweiterung auf eine größere Anzahl von „Schichten“, die für die Diskussion des Verhaltens gewisser Legierungen von Vorteil sein könnte. Vor allem aber läßt dieses Modell erkennen, daß die Elektronentheorie in ihrer vorliegenden Form nur jenen Anteil der Widerstandsänderung im Magnetfeld erfaßt, der auf den Ausgleich der HALL-Spannung in „Schichten“ mit verschiedenem R und σ zurückgeführt werden kann.

1. Messungen der magnetischen Widerstandsänderung an kreisförmigen Wismutscheiben (Fig. 1) haben gezeigt, daß $(\Delta \varrho)_H$ merklich abnimmt (bei $T \sim 80^\circ \text{ K}$ von 51,8 auf 38%; in einem Feld von 700 Oe)

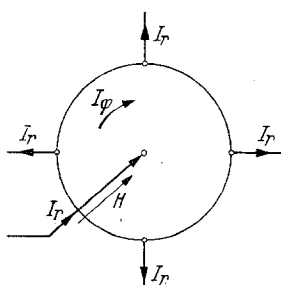


Fig. 1. „CORBINO“ Effekt
in Kreisscheibe.

wenn man durch einen radialen Schlitz in der Scheibe verhindert, daß ein durch die HALL-Spannung ausgelöster Ausgleichsstrom fließt $[I]$. Man muß aus diesem Versuchsergebnis den Schluß ziehen, daß zumindest ein Teil der Widerstandsänderung als das energetische Äquivalent dieses Ausgleichsstromes (CORBINO-Stromes) oder — was auf das gleiche herauskommt — als HALL-Effekt des CORBINO-Stromes, aufgefaßt werden kann. Die Versuche lassen in ihrer bisherigen Form die Frage offen, ob die Widerstandsänderung

bei geschlitzter Scheibe oder bei der üblichen Streifenanordnung auf einen wesentlich anderen Mechanismus oder auf eine Art „inneren“ Ausgleich zurückzuführen ist, wobei dieser Begriff des inneren Ausgleichs fürs erste zweifellos etwas verschwommen wirken wird. Durch einen Kontrollversuch wurde noch gezeigt, daß auch durch einen Ausgleich der HALL-Spannung über die Enden der Streifenanordnung (Fig. 2) eine Vergrößerung von $(\Delta \varrho)_H$ bewirkt wird, die mit einer Reduktion der HALL-Spannung verknüpft ist. Was hier als „innerer“ Ausgleich

bezeichnet wird, sollte also nur für einen Streifen gelten der so lang ist, daß die Ausgleichsvorgänge an den Enden vernachlässigt werden können.

Die Elektronentheorie des metallischen Leitungsmechanismus scheint in ihrer bisherigen Form zu der hier berührten Frage des „inneren Ausgleichs“ keine Aussage zu liefern. Bekanntlich gibt die klassische Theorie [2] für die Widerstandsänderung im Magnetfeld den Ausdruck

$$\frac{(\Delta \varrho)_H}{\varrho_0} = - \frac{(\Delta \sigma)_H}{\sigma_H} \dagger = \frac{C H^2}{1 + D H^2}. \quad (1)$$

Für die Konstanten C und D erhält man

$$C = \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\zeta_0} \right)^2 \cdot (R \sigma_0)^2; \quad D = (R \sigma_0)^2 \quad (2)$$

(R = HALL-Konstante; σ_0 = Leitfähigkeit bei $H = 0$; ζ_0 = Grenzenenergie der FERMI-Verteilung bei $T = 0$). Die Messungen entsprechen größenordnungsmäßig $C = D = (R \sigma_0)^2$, d.h. der berechnete Wert von C ist um einige Zehnerpotenzen zu klein. Auf der anderen Seite haben H. JONES [3], E. H. SONDHEIMER und A. H. WILSON [4] sowie M. KOHLER [5] unter Verwendung der Methoden der modernen Elektronentheorie und der Annahme zweier sich überlagernder Leitungsmechanismen Ausdrücke für $(\Delta \sigma)_H / \sigma_H$ abgeleitet, die zumindest bei der Diskussion der Messungen an Bi-Legierungen eine unzweifelhafte Überlegenheit gegenüber dem Ausdruck (1) aufweisen. Man hat dabei die Wahl zwischen der Annahme einer durch die Kristallstruktur bedingten *Anisotropie*, die in qualitativer Form auch schon von anderen Autoren eingeführt worden ist [6] und der Annahme des Nebeneinanderbestehens eines *Überschuß-* und eines *Defektelektronen*-Leitungsmechanismus („Zweibändermodell“ nach [4] und [5]). H. JONES (l. c.) hat beide Möglichkeiten gleichzeitig berücksichtigt. Der Ausdruck, den er für $(\Delta \sigma / \sigma)_H$ erhält, stimmt bei Vernachlässigung der Anisotropie mit dem von SONDHEIMER und WILSON, bzw. von KOHLER erhaltenen überein. Zum Vergleich mit unseren Ergebnissen setzen wir die von den genannten Autoren erhaltenen Ausdrücke für $(\Delta \sigma / \sigma)_H$, sowie für die HALL-Konstante zuerst in der von ihnen angegebenen, dann in einer etwas modifizierten Form hierher:

$$\frac{\sigma_0 - \sigma_H}{\sigma_H} = \frac{\left(\frac{H}{ec} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{0s}}{n_s} + \frac{\sigma_{0d}}{n_d} \right)^2 \frac{\sigma_{0s} \cdot \sigma_{0d}}{(\sigma_{0s} + \sigma_{0d})^2}}{1 + \left(\frac{H}{ec} \right)^2 \frac{(n_s - n_d)^2}{n_s^2 n_d^2} \cdot \left(\frac{\sigma_{0s} \sigma_{0d}}{\sigma_{0s} + \sigma_{0d}} \right)^2} \quad (3)$$

† Wegen der bequemen Schreibung der Formeln werden wir im weiteren Verlauf unserer Darlegungen ϱ durch σ ersetzen.

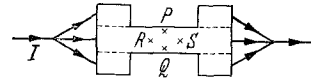


Fig. 2. Die HALL-Spannung wird an den Punkten P und Q , der Widerstand bzw. die Widerstandsänderung im Magnetfeld, an den Punkten R und S gemessen. Schneidet man die verbreiterten Seitenteile längs der strichlierten Linien ab, so steigt die HALL-Spannung, während $\Delta \varrho_H / \varrho_0$ abnimmt.

(vgl. SONDHEIMER und WILSON [4], S. 446, Gl. (59)). σ_0 ist die gesamte Leitfähigkeit, σ_{0s} die der s -, σ_{0d} die der d -Elektronen bei $H=0$; n_s und n_d ist die Zahl der s -, bzw. d -Elektronen per cm^3 . Beachtet man, daß die HALL-Konstante in einem Band

$$|R_i| = \frac{1}{n_i e c} \quad i = s, d$$

ist (der Faktor c ist durch das bei SONDHEIMER und WILSON verwendete Maßsystem bedingt) und daß die HALL-Konstante im d -Band das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie im s -Band, so wird aus (3)

$$\frac{\sigma_0 - \sigma_H}{\sigma_H} = \frac{(R_s \sigma_{0s} - R_d \sigma_{0d})^2 \frac{\sigma_{0s} \sigma_{0d}}{(\sigma_{0s} + \sigma_{0d})^2} \cdot H^2}{1 + (R_s + R_d)^2 \left(\frac{\sigma_{0s} \sigma_{0d}}{\sigma_{0s} + \sigma_{0d}} \right)^2 H^2}. \quad (4)$$

Für die HALL-Konstante gibt E. H. SONDHEIMER [7] den Ausdruck [l. c. S. 504, Gl. (54)]

$$R = -\frac{1}{e c} \cdot \frac{\frac{\sigma_{0s}^2}{n_s} - \frac{\sigma_{0d}^2}{n_d} + \left(\frac{H}{e c} \right)^2 \frac{n_s - n_d}{n_s^2 n_d^2} \cdot \sigma_{0s}^2 \sigma_{0d}^2}{(\sigma_{0s} + \sigma_{0d})^2 + \left(\frac{H}{e c} \right)^2 \frac{(n_s - n_d)^2}{n_s^2 n_d^2} \cdot \sigma_{0s}^2 \sigma_{0d}^2}, \quad (5)$$

daraus ergibt sich analog zu (4)

$$R = \frac{(R_s \sigma_{0s}^2 + R_d \sigma_{0d}^2) + (R_s R_d + R_s^2 R_d) \frac{\sigma_{0s}^2 \sigma_{0d}^2 \cdot H^2}{(\sigma_{0s} + \sigma_{0d})^2 + (R_s + R_d)^2 \sigma_{0s}^2 \sigma_{0d}^2 \cdot H^2}}{\sigma_{0s} + \sigma_{0d}} \dagger. \quad (6)$$

2. Wir wollen nun zeigen, daß die Annahme eines zweifachen Leitungsmechanismus sich äußerst einfach durch eine Art *Ersatzschema* darstellen läßt. Dieses führt in völlig anschaulicher Weise durch elementare Rechnungen zu den Gln. (4) und (6) der Zweibändertheorie. Wir nehmen zu diesem Zweck an, daß sich das Nebeneinander der beiden Leitungsmechanismen durch ein räumliches Nebeneinander zweier, durch verschiedene Werte der Konstanten R und σ gekennzeichneten „Phasen“ darstellen läßt, wobei dieser Begriff der Phase natürlich nicht im thermodynamischen Sinn verstanden werden darf. Wir nehmen ferner für eine erste, näherungsweise Behandlung an, daß die beiden „Phasen“ in dünnen, parallelen Schichten angeordnet sind, und zwar so, daß die Grenzflächen der Schichten zur Richtung des Magnetfeldes senkrecht liegen. (Es ist anzunehmen, daß sich dieses Schema bei Bedarf verallgemeinern lassen wird und daß bei dieser Verallgemeinerung der qualitative Charakter der aus dem einfacheren Schema gewonnenen Schlüsse aufrecht bleibt.) Wir nehmen schließlich noch an, daß das quantitative

† Das Minuszeichen auf der rechten Seite von (5) ergibt sich daraus, daß SONDHEIMER für e den Absolutwert setzt. Bei uns ist R_s negativ, wegen des negativen Vorzeichens von e , und R_d positiv.

Verhältnis der beiden Leitungsmechanismen durch die Dicke der Schichten zum Ausdruck gebracht werden kann. Damit führen wir, was für die Diskussion der Verhältnisse in gewissen Legierungen von Vorteil sein könnte, noch einen zusätzlichen Parameter ein. (Wir nehmen stillschweigend an, daß $d_1 + d_2$ gleich einer konstanten Größe d ist, so daß nur über eine der beiden Größen frei verfügt werden kann.)

Für die Rechnung genügt es, zwei aufeinanderfolgende Schichten zu betrachten (Fig. 3), die wir uns am oberen und unteren Rand durch eine widerstandslose Querverbindung in Kontakt gebracht denken¹. Ist die durch den primären, in x -Richtung fließenden Strom erzeugte HALL-Spannung (richtiger gesagt „HALL-Feldstärke“)

$$E_{y,k} = R_k H j_{x,k} = \sigma_k R_k H E_x \quad k = 1, 2 \quad (7)$$

in den beiden Schichten *nicht* gleich groß, so fließt ein Ausgleichsstrom i_y in der durch die Pfeile angedeuteten Richtung durch die beiden Schichten. Dieser Ausgleichsstrom liefert seinerseits einen HALL-Effekt in beiden Schichten, der sich der ursprünglichen Feldstärke in x -Richtung überlagert. Für jede Schicht gilt somit

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\sigma_k} j_{x,k} - R_k H j_{y,k} \\ E_y &= R_k H j_{x,k} + \frac{1}{\sigma_k} j_{y,k} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dabei ist die mittlere Stromdichte in x -Richtung

$$j_x = \frac{1}{d_1 + d_2} \cdot (d_1 j_{x,1} + d_2 j_{x,2}). \quad (8a)$$

In der y -Richtung muß die Stromdichte im Mittel Null sein [der in der Schichte (1) von unten nach oben fließende Strom ist gleich dem in der Schichte (2) von oben nach unten fließenden], also

$$d_1 j_{y,1} + d_2 j_{y,2} = 0. \quad (8b)$$

Aus den Gln. (8) erhält man

$$\left. \begin{aligned} j_{x,k} &= \alpha_k E_x + \beta_k E_y, & \alpha_k &= \frac{\sigma_k}{1 + (R_k \sigma_k H)^2} \\ j_{y,k} &= -\beta_k E_x + \alpha_k E_y, & \beta_k &= \frac{R_k \sigma_k^2 H}{1 + (R_k \sigma_k H)^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

¹ Parallel zur x - y -Ebene sollen die Schichten in unserem Schema voneinander isoliert angenommen werden.

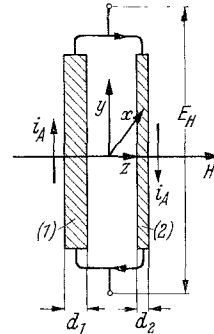


Fig. 3. „Schichten“-Modell im Querschnitt. Der Primärstrom fließt senkrecht zur Zeichenebene.

Durch Einsetzen von (9) in (8a) und (8b) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} (d_1 + d_2) j_x &= (d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2) E_x + (d_1 \beta_1 + d_2 \beta_2) E_y, \\ 0 &= -(d_1 \beta_1 + d_2 \beta_2) E_x + (d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2) E_y, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und daraus

$$E_y = \frac{d_1 \beta_1 + d_2 \beta_2}{d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2} \cdot E_x, \quad (10a)$$

$$j_x = \frac{1}{d_1 + d_2} \cdot \frac{(d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2)^2 + (d_1 \beta_1 + d_2 \beta_2)^2}{d_1 \alpha_1 + d_2 \alpha_2} \cdot E_x = \sigma_H \cdot E_x. \quad (10b)$$

(Bei der Umformung des Ausdrucks für σ_H beachtet man zweckmäßigerweise, daß $\beta_k = \alpha_k \cdot R_k \sigma_k H$.) Man erhält schließlich, nach einigen Umformungen

$$\sigma_H = \frac{1}{d_1 + d_2} \cdot \frac{(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2)^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 (R_1 d_2 + R_2 d_1)^2 H^2}{(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2) + \sigma_1 \sigma_2 (R_1^2 \sigma_1 d_2 + R_2^2 \sigma_2 d_1) H^2}, \quad (11)$$

und daraus wegen

$$\begin{aligned} \sigma_{H=0} &= \frac{\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2}{d_1 + d_2} \\ \frac{\sigma_0 - \sigma_H}{\sigma_H} &= \frac{(R_1 \sigma_1 - R_2 \sigma_2)^2 \frac{\sigma_1 \sigma_2 d_1 d_2}{(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2)^2} \cdot H^2}{1 + (R_1 d_2 + R_2 d_1)^2 \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2} \right)^2 \cdot H^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Aus Gl. (12) folgt, daß die Widerstandsänderung im Magnetfeld Null wird, wenn $R_1 \sigma_1 = R_2 \sigma_2$, d.h. wenn die Beweglichkeit der Elektronen in beiden Schichten gleich groß wird. In unserem Modell hat diese Bedingung eine noch anschaulichere Bedeutung: wenn $R_1 \sigma_1 = R_2 \sigma_2$, so ist wegen Gl. (7) (E_x ist für beide Schichten gleich groß) die HALL-Spannung in beiden Schichten gleich, es tritt somit kein Ausgleichsstrom auf. Die Widerstandsänderung wird andererseits um so größer, je größer die Differenz $R_1 \sigma_1 - R_2 \sigma_2$ ist, d.h. je größer der Unterschied im Leitungsmechanismus der beiden Schichten und je größer daher der Ausgleichsstrom ist. Der zweite Summand im Nenner von (12) bewirkt bei größeren Feldstärken eine Krümmung der $\Delta\sigma(H)$ -Kurven zur H -Achse. Dieser Einfluß sollte Null werden, wenn $R_1 d_2 = -R_2 d_1$ ist.

Für die resultierende HALL-Konstante (d.h. die HALL-Konstante, die man an der makroskopischen Probe tatsächlich mißt) erhalten wir schließlich aus Gl. (10a), wenn wir E_x durch j_x / σ_H ersetzen

$$R_{\text{res}} = \frac{E_y}{H j_x} = \frac{(d_1 + d_2) [(R_1 \sigma_1^2 d_1 + R_2 \sigma_2^2 d_2) + R_1 R_2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (R_2 d_1 + R_1 d_2) H^2]}{(\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2)^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 (R_1 d_2 + R_2 d_1)^2 \cdot H^2} \quad (13)$$

Wir werden Gl. (13) an anderem Ort im Zusammenhang mit der Besprechung von Messungen an Wismutlegierungen ausführlicher diskutieren. Man erkennt jedenfalls, daß bei entgegengesetztem Vorzeichen von R_1 und R_2 aus (13) eine Feldstärkenabhängigkeit resultiert, die unter

Umständen soweit gehen kann, daß bei höheren Feldstärken R_{res} Null wird und bei noch höheren Feldstärkenwerten sein Vorzeichen umkehrt. Ein solches Verhalten wird bei Bi—Sn- und Bi—Pb-Legierungen tatsächlich beobachtet; wir dürfen daher annehmen, daß bei ihnen ein Nebeneinander eines Überschuß- und eines Defektelektronen-Leitungsmechanismus besteht, das sich in großen Zügen durch das Zweischichtenmodell beschreiben läßt. Im Zusammenhang mit dem Verhalten der Bi-Legierungen hat schon H. JONES (l. c.) aus seiner Zweibändertheorie Ausdrücke entwickelt, die zumindest für kleine Konzentrationen gelten sollten. Auf Grund der Theorie von JONES hat N. THOMPSON [8] mit Hilfe einer Art Zweischichtenschemas einen Ausdruck für die Widerstandsänderung im Magnetfeld entwickelt, wobei aber die Rolle des Ausgleichs der HALL-Spannung zwischen den Schichten nicht berücksichtigt wurde. Angeregt durch die Überlegungen THOMPSONS hat der eine von uns das Schichtenmodell zuerst zur Deutung der Feldstärkenabhängigkeit des HALL-Effekts der Bi-Legierungen heranzuziehen versucht [9], dann erfolgte die Ergänzung des Modells durch Einbeziehung des HALL-Effekts des Ausgleichsstromes.

Man sieht nun sofort, daß unsere Gln. (12) und (13) mit den entsprechenden Gleichungen bei SONDHEIMER [4] und KOHLER [5] übereinstimmen, wenn man $d_1 = d_2$ setzt. [In Gl. (13) bleibt wohl ein Faktor 2 übrig, der in Gl. (6) fehlt und der sich daraus erklärt, daß durch die räumliche Trennung der beiden „Schichten“ die Stromdichte j_x auf die Hälfte reduziert worden ist¹.] Eine Prüfung der Ableitungen von SONDHEIMER und KOHLER führt zu der Erkenntnis, daß die Übereinstimmung zwischen ihren und unseren Resultaten darin begründet ist, daß sie voraussetzungsmäßig die Wechselwirkung zwischen den s - und d -Elektronen vernachlässigen. Infolge der so postulierten Unabhängigkeit der beiden Leitungsmechanismen wird die Darstellung durch ein Ersatzschema, das sie räumlich voneinander trennt und gewissermaßen in zwei verschiedene „Phasen“ des Metalls verlegt, zu einer Selbstverständlichkeit.

3. In einem, wenn auch vielleicht nicht sehr bedeutungsvollen Punkt ist die Methode des Schichtenmodells den zweifellos wesentlich allgemeineren und tiefer fundierten Deduktionen von SONDHEIMER und KOHLER überlegen: sie läßt sich ohne weitere Schwierigkeiten auf beliebig viele Schichten übertragen. Man überzeugt sich leicht, daß die Gln. (8) und (9) auch für diesen Fall gelten. Für die resultierenden Stromdichten erhält man die Gleichungen

$$j_x = AE_x + BE_y; \quad j_y = -BE_x + AE_y, \quad (14)$$

$$A = \frac{\sum d_k \alpha_k}{\sum d_k}; \quad B = \frac{\sum d_k \beta_k}{\sum d_k}, \quad (14a)$$

¹ Siehe Nachtrag bei der Korrektur, S. 619.

wobei die Bedeutung von α_k und β_k die gleiche bleibt, wie in den Gl. (9). Man kann schließlich auch zu unendlich vielen, unendlich dünnen Schichten übergehen, die Summen in Gl. (14a) gehen dann in entsprechende Integrale über.

Diese Überlegungen wollen wir zum Ausgangspunkt nehmen, um — der Vollständigkeit halber — zu zeigen, daß auch der von der klassischen Elektronentheorie gelieferte Ausdruck [Gl. (4)] für die Widerstandsänderung als die Folge eines inneren Ausgleichs aufgefaßt werden kann. Es handelt sich, anschaulich gesprochen, darum, daß den Elektronen verschiedener Energie je eine bestimmte Leitfähigkeit und eine entsprechende HALL-Konstante zugeordnet werden kann, so daß die Formeln des „Vielschichtenschemas“ anwendbar werden. Wegen der Schwierigkeiten, die sich einer korrekten Definition dieser partiellen Leitfähigkeiten und HALL-Konstanten entgegenstellen, empfiehlt sich eine Umkehrung des Vorganges: wir werden nachweisen, daß in den aus der Elektronentheorie folgenden Integralen Ausdrücke enthalten sind, die zwanglos als solche partielle Leitfähigkeiten aufgefaßt werden können.

Die bei hohen Temperaturen gültigen Gleichungen für die Stromdichten, die aus den Ansätzen der LORENTZ-SOMMERFELDSchen Theorie erhalten werden (vgl. [1], S. 121, wobei dort zum besseren Vergleich grad $T=0$ gesetzt werden muß) haben die gleiche Form wie die Gl. (14), nur sind die Konstanten A und B aus der Mittelwertbildung für v_x und v_y mit Hilfe der gestörten Verteilungsfunktion entstandene Integrale. Es ist

$$j_x = A E_x + B E_y; \quad j_y = -B E_x + A E_y, \quad (15)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{8\pi e^2 m^2}{3h^3} \int \frac{l v^2}{1 + \frac{e^2 l^2}{m^2 v^2} H^2} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial E} dE \\ B &= -\frac{8\pi e^3 m}{3h^3} H \int \frac{l^2 v}{1 + \frac{e^2 l^2}{m^2 v^2} H^2} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial E} dE. \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

Der Faktor vor dem Integral läßt sich umformen und unter das Integral bringen, wenn wir beachten, daß die Zahl der Elektronen, deren Geschwindigkeit bei $T=0$ zwischen Null und v liegt, durch den Ausdruck

$$n(v) = \frac{8\pi m^3 v^3}{3h^3}$$

dargestellt wird. Wir erhalten somit für A und B

$$A = -\int \frac{\sigma_v}{1 + (R_v \sigma_v H)^2} \cdot df_0; \quad B = -H \cdot \int \frac{\sigma_v^2 R_v}{1 + (R_v \sigma_v H)^2} \cdot df_0, \quad (16)$$

wobei wir zunächst rein formal

$$\sigma_v = \frac{n(v) e^2 l}{m v}; \quad R_v = \frac{1}{n(v) e}$$

gesetzt haben. Für $H=0$ wird $A = \sigma_0$, der Integrand $s_v = |\sigma_v df_0|$ hat daher tatsächlich die Dimension einer Leitfähigkeit. Man erkennt leicht, daß $|\sigma_v df_0|$ dem Beitrag jener Elektronen zur Leitfähigkeit entspricht, die in dem schraffierten Teil der Verteilungsfunktion (Fig. 4) enthalten sind. Für die HALL-Konstante der Gesamtheit aller Elektronen erhalten wir aus (15), indem wir $j_y = 0$ setzen

$$R = \frac{E_y \sigma_H}{H j_x} \sim \frac{E_y \sigma_0}{H j_x} = \frac{1}{n e}.$$

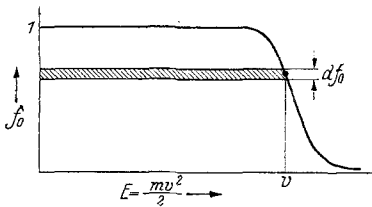


Fig. 4. Das „Vielschichten“-Schema des Elektronengases.

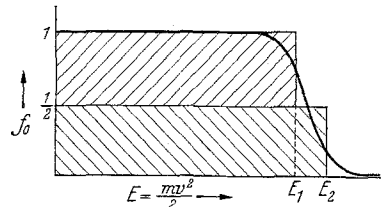


Fig. 5. Das „Zweischichten“-Schema des Elektronengases. $E_1 = \zeta - v k T$, $E_2 = \zeta + v k T$.

R ist somit der Zahl der am Leitungsvorgang beteiligten Elektronen verkehrt proportional. In dem schraffierten Teil der Verteilungsfunktion in Fig. 4 sind $|n(v) \cdot df_0|$ Elektronen enthalten. Es scheint somit plausibel als HALL-Konstante dieses Teilgebietes

$$r_v = \frac{1}{|n(v) df_0| \cdot e} = \frac{R_v}{|df_0|}$$

anzunehmen. Mit Hilfe dieser Festsetzungen für s_v und r_v erhalten die Ausdrücke (16) die endgültige Form

$$A = \sum \frac{s_v}{1 + (r_v s_v H)^2}; \quad B = H \sum \frac{s_v^2 r_v}{1 + (r_v s_v H)^2}. \quad (17)$$

Damit ist aber die volle Analogie zu den Summenformeln (14a) hergestellt und gezeigt, daß sich das Elektronengas als Mehrschichtensystem darstellen läßt.

Daß die hier verwendeten Definitionen für die partielle Leitfähigkeit und die zugehörige HALL-Konstante sinnvoll sind, läßt sich noch durch eine äußerst elementare und deshalb doppelt überzeugungskräftige Übersichtsrechnung zeigen. Wie Fig. 5 veranschaulicht, kann die Gesamtheit aller Elektronen auch in zwei Gruppen zerlegt werden, von denen die eine Elektronen von der Geschwindigkeit Null bis zur Maximalgeschwindigkeit $v_1 = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\zeta - v k T}$, die zweite von $v=0$ bis

$v_2 = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\zeta + \nu kT}$ umfaßt. Leitfähigkeit und HALL-Konstante der beiden Gruppen sind dann durch die Ausdrücke

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(v_1) e^2 l}{m v_1}; \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(v_2) e^2 l}{m v_2}; \quad R_1 = \frac{2}{n(v_1) \cdot e}; \quad R_2 = \frac{2}{n(v_2) \cdot e}$$

gegeben, wobei in diesem Fall $d/f_0 = \frac{1}{2}$ ist. Wenden wir hier die für das Zweischichtenmodell geltende Gl. (12) an und setzen $d_1 = d_2$, so erhalten wir zunächst für den zweiten Summanden im Nenner

$$DH^2 = (R_1 + R_2)^2 \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^2 \cdot H^2 \sim (R \sigma)^2 \cdot H^2, \quad (18a)$$

wobei R und σ die aus (15) erhaltenen Näherungswerte für die Gesamtheit der Elektronen sind. Für den Zähler ergibt sich

$$CH^2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \cdot (R_1 \sigma_1 - R_2 \sigma_2)^2 H^2 \sim \frac{1}{4} \cdot \frac{e^2 l^2}{2m} \times \left\{ \begin{aligned} &\times \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta - \nu kT}} - \frac{1}{\sqrt{\zeta + \nu kT}} \right)^2 \cdot H^2 \sim \frac{\nu^2}{4} \cdot (R \sigma)^2 \left(\frac{kT}{\zeta_0} \right)^2 \cdot H^2. \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

Dieses Ergebnis stimmt aber, in Anbetracht des Umstandes, daß ν etwa zwischen den Grenzen 0 und 5 liegen wird (Gesamtbreite des Abfalls der FERMI-Funktion bei mittleren Temperaturen $\sim 10 kT$) ganz ausgezeichnet mit dem Näherungswert überein, den die klassische Theorie für die Konstanten in Gl. (1) liefert. Wir hoffen, an anderer Stelle zeigen zu können, daß die Anwendung des Mehrschichtenmodells auf das klassische Elektronengas auch die anschauliche Ableitung der thermomagnetischen Effekte und damit eine modellmäßige Darstellung der Zusammenhänge zwischen ihnen ermöglicht, als Ergänzung der thermodynamischen Ableitung die von BRIDGMAN und anderen gegeben worden ist (vgl. [I], S. 257).

4. Zum Abschluß wollen wir nochmals auf das Problem der zirkulär-symmetrischen Anordnung nach CORBINO zurückkommen und einige darauf bezügliche fundamentale Beziehungen ableiten. Für die Feldstärkenkomponenten und die Komponenten der Stromdichte gelten selbstverständlich in Polarkoordinaten die gleichen linearen Beziehungen wie in kartesischen Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{1}{\sigma} j_r - RH j_\varphi \\ E_\varphi &= RH j_r + \frac{1}{\sigma} j_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

und infolgedessen

$$\left. \begin{aligned} j_r &= \alpha E_r + \beta E_\varphi, & \alpha &= \frac{\sigma}{1 + (R \sigma H)^2} \\ j_\varphi &= -\beta E_r + \alpha E_\varphi, & \beta &= \frac{\sigma^2 RH}{1 + (R \sigma H)^2} \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

In der geschlossenen Kreisscheibe kann keine zirkuläre Feldstärke auftreten, daher

$$E_\varphi = 0; \quad j_\varphi = -\beta E_r = -\frac{\beta}{\alpha} j_r = -\sigma R H j_r = -C H j_r. \quad (20)$$

Die Bedingung $E_\varphi = 0$ kann auch so interpretiert werden, daß man eine elektromotorische Kraft RHj_r annimmt, der der Spannungsabfall $\frac{1}{\sigma} j_\varphi$ entgegenwirkt (Stromkreis mit sich gegenseitig durchdringendem „inneren“ und „äußeren“ Teil, analog den Verhältnissen in einem Kreisring in einem elektrischen Wirbelfeld).

Der Faktor α in

$$j_r = \alpha E_r$$

hat die Bedeutung einer durch das Magnetfeld veränderten Leitfähigkeit σ_H . Bilden wir

$$\frac{\sigma - \sigma_H}{\sigma_H} = -\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right)_H,$$

so erhalten wir nach kurzer Umformung

$$-\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right)_H = (R\sigma)^2 \cdot H^2. \quad (21)$$

In dieser Ableitung wurde noch keine weitere Annahme über die Natur des Leitungsmechanismus gemacht, d.h. Gl. (21) gilt für ein Metall mit einfachem Leitungsmechanismus. Nehmen wir nunmehr noch zusätzlich an, daß die Kreisscheibe aus einem Metall mit zwei Leitungsmechanismen besteht, so erhalten wir

$$j_r = (\alpha_1 + \alpha_2) E_r; \quad j_\varphi = -(\beta_1 + \beta_2) E_r = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot j_r. \quad (22a)$$

Dies ergibt nach Einsetzen für α und β aus Gl. (9)

$$j_r = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2 (R_1^2 \sigma_1 + R_2^2 \sigma_2) \cdot H^2}{[1 + (R_1 \sigma_1 H)^2][1 + (R_2 \sigma_2 H)^2]} \cdot E_r = \sigma_H E_r. \quad (22b)$$

Für $H = 0$: $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2$, daher

$$\frac{\sigma_0 - \sigma_H}{\sigma_H} = \frac{(R_1^2 \sigma_1^3 + R_2^2 \sigma_2^3) H^2 + R_1^2 R_2^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot H^4}{(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2 (R_1^2 \sigma_1 + R_2^2 \sigma_2) H^2}. \quad (22c)$$

Vergleichen wir (22c) mit (12), so sehen wir, daß die $\Delta\sigma-H$ -Kurven an kreisförmigen Anordnungen gemessen eine viel stärkere Krümmung aufweisen müßten als die an streifenförmigen Proben gewonnenen.

Für die CORBINO-Konstante $C = j_\varphi / H j_r$ erhalten wir aus (22a)

$$C = \frac{(R_1 \sigma_1^2 + R_2 \sigma_2^2) + \sigma_1^2 \sigma_2^2 (R_1 R_2^2 + R_1^2 R_2) H^2}{(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2 (R_2^2 \sigma_2 + R_1^2 \sigma_1) H^2}. \quad (23)$$

In diesem Fall ist der Vergleich mit der an Streifen gemessenen HALL-Konstanten sogar quantitativ durchführbar. Der in (23) enthaltene

Wert für C ergibt sich aus dem in Gl. (13) angegebenen Wert für R_{res} in der Form

$$C = R_{\text{res}} \cdot \sigma_H, \quad (24)$$

wobei für σ_H der in Gl. (11) für die streifenförmige Anordnung entwickelte Ausdruck gesetzt werden muß. Aus Gl. (24) folgt, daß die CORBINO-Konstante in Materialien mit gemischtem Leitungsmechanismus eine sehr starke Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke aufweisen muß, da sowohl R_{res} , als auch σ_H vom Feld abhängen. Tatsächlich liegen Messungen von E. P. ADAMS und A. K. CHAPMAN [10] vor, die diese Folgerung zu bestätigen scheinen. ADAMS und CHAPMAN finden an Wismutscheiben eine sehr bedeutende Abnahme der CORBINO-Konstanten mit zunehmender Feldstärke (bei 7725 Oe ist C nahezu nur mehr die Hälfte des bei $H=30$ Oe gemessenen Wertes). Das ist mehr, als der Abnahme von σ mit H entspricht (nach KOHLRAUSCH, Prakt. Physik, Bd. 2, 18. Aufl., S. 94 wäre die Leitfähigkeit bei 18°C und $H=8000$ Oe erst $0,74 \sigma_{H=0}$). Leider haben ADAMS und CHAPMAN keine parallelen Messungen an streifenförmigen Proben des gleichen Materials ausgeführt. Nun nimmt aber gerade bei Wismut die HALL-Konstante schon bei sehr kleinen Zusätzen an Pb oder Sn ziemlich stark mit zunehmender Feldstärke ab, so daß die Meßergebnisse von ADAMS und CHAPMAN durch die Annahme derartiger Verunreinigungen (die erfahrungsgemäß auch durch die Angabe „chemical pure“ nicht ausgeschlossen sind) leicht verständlich werden.

Ergänzende Bemerkungen.

a) In den Gl. (8), von denen die Erörterung des „Mehrschichtenmodells“ seinen Ausgang nimmt, wurden die einzelnen Schichten durch eine Leitfähigkeit σ_k charakterisiert, ohne daß ausdrücklich hervorgehoben wurde, daß über die Abhängigkeit dieser Größen vom Magnetfeld im Rahmen unserer Überlegungen keine Aussage gemacht werden kann. Nachträglich wollen wir nun feststellen, daß die σ_k als vom Magnetfeld abhängig angenommen werden können, wenn man annehmen will, daß noch ein anderer Mechanismus der Widerstandsbeeinflussung existiert, der von dem in unserem Modell beschriebenen verschieden und von ihm unabhängig ist. Es wird im wesentlichen von der Diskussion der theoretischen Ergebnisse im Vergleich mit den Meßresultaten abhängen, ob man die Annahme eines anderen Mechanismus der Widerstandsbeeinflussung als berechtigt ansehen wird oder nicht. Bei einer vorläufigen Durchsicht des empirischen Materials wird man vor allem das Verhalten der Ferromagnetika zum Anlaß nehmen, um diese Frage zu erörtern und annehmen, daß hier der Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Ordnungszustand die Verhältnisse beherrscht. Andererseits müssen wir

beachten, daß wir, ebenso wie die Autoren der „Zweibändertheorie“, die Wechselwirkung zwischen s - und d -Elektronen ausgeschaltet haben, die gerade bei der Bestimmung der Leitfähigkeit in ferromagnetischen Metallen eine entscheidende Rolle spielt. Wir dürfen aber fürs erste vermuten, daß die Annahme der Unabhängigkeit der σ_k vom Magnetfeld einige Berechtigung hat, ohne daß wir damit für späterhin die in dieser Annahme steckende Willkür gänzlich übersehen wollen.

b) Wir wollen ferner — um unfruchtbare Polemiken nach Tunlichkeit zu vermeiden — ausdrücklich anerkennen, daß die Zweibändertheorie wesentlich allgemeiner und umfassender fundiert ist als unser Modell. Wenn wir unser Modell als Ersatzschema für die Zweibändertheorie bezeichnen, so gilt dies eben nur mit Einschränkungen, sofern nämlich die Zweibändertheorie durch spezialisierende Zusatzannahmen ihre Allgemeinheit selber reduziert. Das braucht uns nicht zu hindern, mit einiger Genugtuung festzustellen, daß die aus unserem Modell sich ergebenden Folgerungen gerade innerhalb des Umfangs, in dem zur Zeit ein Vergleich mit der Erfahrung möglich ist, mit denen der Zweibändertheorie übereinstimmen. Es kann deshalb bei einiger Vorsicht nicht schaden, wenn man das „Mehrschichtenmodell“ *neben* dem Zweibändermodell verwendet und zusieht, auf welchem Weg man schneller und mit plausiblen Zusatzannahmen zu einer besseren Übereinstimmung mit den Erfahrungstatsachen gelangt. Es wäre denkbar, daß in manchen Fällen das Mehrschichtenmodell gerade wegen seiner Unabhängigkeit von allzu allgemeinen Voraussetzungen und Begriffen mindestens vorübergehend rascher zum Ziel führt als die allgemeine Theorie.

Nachtrag bei der Korrektur.

Daß wir in unserem Ersatzschema eine *räumliche* Trennung der beiden Leitungsmechanismen vorausgesetzt haben, ist in der Hauptsache nur der besseren Veranschaulichung wegen geschehen. Von diesem Gesichtspunkt aus mag der Umstand, daß wir den quantitativen Anteil der beiden Mechanismen durch die Dicke der beiden Schichten dargestellt haben, zu Mißverständnissen führen. In unserem Schema sind R_1 , R_2 , σ_1 und σ_2 *die* Konstanten, die gelten würden, wenn alle Elektronen des Metalls dem Leitungstypus 1 oder 2 zugeordnet sind, d. h. wenn die beiden Schichten völlig homogene Phasen mit R_1 , σ_1 bzw. R_2 , σ_2 wären. Wir vermuten, daß sich diese Vorstellung auf gewisse Legierungen, die aus übersättigten Mischkristallen in einem metastabilen Vorstadium der Ausscheidung bestehen, tatsächlich anwenden läßt. Dagegen läßt sich der exakte Übergang zum Zweibänder-Modell ganz einfach bewerkstelligen, wenn man Gl. (8a) und (8b) durch

$$j_x = j_{x,1} + j_{x,2} \quad \text{und damit} \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (8a')$$

und

$$\dot{j}_y = \dot{j}_{y,1} + \dot{j}_{y,2} = 0 \quad (8b')$$

ersetzt. In diesem Fall erhalten wir an Stelle von Gl. (13) genau die Gl. (6), die sich durch Umrechnung aus der von E. SONDHEIMER abgeleiteten Gl. (5) ergibt.

Literatur.

- [1] HALPERN, L., u. K. M. KOCH: Acta physica Austriaca **5**, 129 (1951). — [2] BRILLOUIN, L.: Quantenstatistik, VII. Kap. Berlin: Springer 1931. — [3] JONES, H., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **155**, 653 (1936). — [4] SONDHEIMER, E. H., and A. H. WILSON: Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **190**, 435 (1947). — [5] KOHLER, M.: Ann. Phys., 6. F. **6**, 18 (1949). — [6] Handbuch der Physik (GEIGER-SCHEEL) Bd. XXIV/2, S. 566ff. — [7] SONDHEIMER, E. H.: Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **193**, 484 (1948). — [8] THOMPSON, N.: Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **164**, 24 (1938). — [9] KOCH, K. M.: Physikal. Verh. 1951, H. 3, S. 55. Kurzref. auf der Tagg. der Nordwestdtsh. Phys.-Ges. in Braunschweig, April 1951. — [10] ADAMS, E. P., and A. K. CHAPMAN: Phil. Mag. (6) **28**, 692 (1914).

Wien, Dozentur für Elektro- und Magnetophysik der Werkstoffe an der Technischen Hochschule.