

Statistics: Mathematical Specialty or Separate Discipline?

by K. L. Weldon

Department of Mathematics and Statistics, Simon Fraser University

Introduction

In a recent presidential address to the Royal Statistical Society, John Nelder made the following point:

"If the statistician can rightly claim to be interested in the theory and practice of activities in science and technology, we need to ask why so many scientists and technologists believe that statistics has little to offer them in their work."

In an opening address to the Second International Conference on Teaching Statistics, Jim Zidek reminded us that many important statistical techniques were invented by researchers who were experts in fields other than statistics, and that this source of innovation in statistics continues to be productive today. But he is concerned about the response of today's teachers of statistics. He says,

"All of this leads me to suggest that there is a very realistic possibility that statistics will cease to exist. It may flow out through its primordial roots back into substantive areas where it will be developed in a piece-meal fashion, as in its past, by an army of statistical users rather than statistical scientists. It is incumbent on all of us to resist this process of dissolution, to resist defining our subject out of existence. We can begin by not defining our curriculum too narrowly."

These recent quotes from Nelder (1986) and Zidek (1986) lend authority to an opinion argued in this paper: the subject of statistics is unloved and underutilized, and the source of this ignominy is the content of the subject as it has been taught. I present my own argument for this view, and propose some corrective measures. In particular, I argue for the treatment of statistics as a separate discipline, and suggest that developments to date in this direction still fall short of the ideal.

The dismal image of statistics

One way to judge the image of statistics is to imagine the results of the following survey: all faculty of a university are asked to choose the discipline they find most interesting, after their own discipline. How many would choose statistics? Probably very few. Next we might branch out into the larger professional world of engineers, scientists, criminologists, and nurses. Are there any out there who appreciate the intellectual leverage of statistical thinking? Or would not most professionals express the opinion that statistics is a necessary but certainly dull subject, which

levels in messy and/or incomprehensible mathematics, and results in messy and/or incomprehensible numerical statements. Even relatively enlightened non-statisticians are skeptical of the practical importance of the material we teach in the universities. This view is so prevalent that many teachers accept this situation as unavoidable. If this description of the dismal view of statistics appears to be an overstatement, consider the following:

1. Do your first-contact consulting clients come to you with the expectation that you will help them with their research, or is their expectation rather that you will tell them how to legitimize what they have already concluded?
2. How many university graduates of major fields other than statistics consider their statistics courses to have been exciting and relevant?
3. When did you last hear a businessman say that, before he made an important decision concerning his company, he wanted to discuss the matter with a statistician? Do decision-makers in business ever perceive decision-making to include a data-analysis phase?
4. A group of educated individuals decide to do a survey of the membership of their association to determine guidelines for the next year's program. How many of them will think it appropriate that the design or the analysis of the survey be done by a statistician?

Most of the individuals referred to in the above questions will have had one or more statistics courses, and will have developed a dislike or even an open scorn for the subject. These reactions to statistics should scandalize us all! How is it that a subject that has a bearing on almost every field of endeavor, that has intrigued some great geniuses of the scientific world, that offers the opportunity of white collar employment anywhere in the world, and that holds the key to modern industrial survival, is so universally shunned?

Is the problem with statistics only an image problem?

If the dismal image of statistics were only a "perception" problem, we could perhaps ignore it and wait for public enlightenment to occur. Or perhaps the profession could engage an army of public relations experts. But the image problem is only a symptom of a more serious deficiency in our teaching of the subject, which stems from a misconception: the misconception is that statistics is a specialty within mathematics; that its essence is found in the discipline of mathematics; that statistics is

merely an application of mathematics. Rather, statistics is a discipline unto itself, it is in essence the scientific method, and mathematics is merely one of the intellectual tools available to clarify and solve problems in statistics. The treatment of statistics as an "application" of mathematics not only leads to all the image problems just mentioned, but induces teachers to limit their instruction to a very narrow portion of the discipline.

Thus the teaching of statistics from a purely mathematical basis is inappropriate for the discipline of statistics: it leads to widespread misunderstanding of the practical value of statistics, and it leads to the omission of instruction in the parts of the basic theory of statistics that happen not to be mathematical in nature.

Are non-algebraic aspects of statistics fundamental to statistical theory?

I have outlined elsewhere (Weldon, 1986) examples of non-algebraic concepts that are at least as fundamental to statistical theory as are moment generating functions, confidence intervals, and t -tests. One way to summarize these points is to list questions that a graduate of an intermediate undergraduate course in statistics should be able to answer:

1. What are criteria for accepting assumptions of independence, linearity or normality?
2. Describe in words the kind of situation in which "Simpson's paradox" might deceive the unwary. Same question for "regression toward the mean"
3. What is the essential difference between a study design from which one can infer a causal relationship and one that reveals only association of variables?
4. What feature of a distribution does a mean measure that is not measured by any other statistic? Same for standard deviation, and correlation coefficient. Describe these aspects in words that would be understandable to a non-statistician.
5. In a hypothesis testing setting, what are the logical links between prior beliefs, purpose of analysis, P -value, sample size, and the ultimate conclusions of the hypothesis test?
6. What aspects of a statistical problem indicate whether data analysis, estimation, hypothesis testing, or some combination of these strategies, is required? When is a Bayesian approach most appropriate?

These questions are only examples of a vast area of non-algebraic aspects of statistics, but they do point to things that receive scant attention in most statistics

courses and textbooks. Now a typical comment from a mathematically-oriented teacher of statistics would be that these issues are too sophisticated for an early course and that t-tests should be learned first. But is this really sensible? The aspects of t-tests that students find fairly easy to learn are absolutely useless without an understanding of when any hypothesis test (t or other) is appropriate, when it should be a t-test, and what it means when it is done. Knowing when a test of some sort is needed is surely more fundamental than the calculation details of the particular test. Furthermore, to students who are not directed to a career in statistics, the non-mathematical issue is probably easier to learn. So it is more relevant and easier to learn this non-mathematical issue than to learn how to do a t-test. Why do all textbooks in elementary statistics apparently ignore this? Perhaps it is erroneously thought that such non-mathematical issues do not belong to an introduction to statistics because they are not mathematical issues.

Are the non-mathematical aspects only appropriate for service courses?

The usual training of statisticians begins with a training in mathematics, including the mathematics of statistics; the non-mathematical aspects are presumably learned on the job. Apprenticeship was the only method of training in most professions until relatively recently, but have we not found that formal training is far more efficient? If part of statistics must be learned on the job, it is doubtful that the non-algebraic aspects such as those mentioned above are the best part to be left to apprenticeship training. If the general ideas of hypothesis testing are understood, say in the context of a sign test or a normal test, would it be so difficult to pick up a book and find out about the t-test? It seems to me that the non-algebraic aspects of statistics should be included in early statistical courses, whether the course is a service course or a course for a career statistician.

Possibly the failure of teachers of statistics to include adequate treatment of non-algebraic aspects of statistics is a consequence of the teachers' belief that such aspects are not part of the subject they are teaching. But it seems unlikely that teachers of statistics who have consulting experience would actually believe this. Most consultants know that issues such as "correlation does not imply causation" are a key part of statistical theory. There are more plausible explanations for omission of non-algebraic aspects from statistics courses:

1. There are powerful institutional pressures inducing the teacher to concentrate on these algebraic aspects at the expense of the "soft" concepts.

The creation of Statistics departments is only effective in resisting mathematical domination when the faculty change their academic style accordingly.

2. The training of the teacher of statistics is probably strong in mathematics and weak in the non-mathematical aspects of statistics.

3. The most prestigious Statistics journals encourage content of the most mathematical kind - there is little tolerance for speculation, comment on relevance or interpretation, in these journals.

4. The non-algebraic aspects of statistics are difficult to include in a test or examination. Even teachers who spend ample time discussing criteria for the assumption of independence will usually not set exam questions in which the student will have to use these criteria before proceeding with a calculation.

5. When a mathematician is asked to teach statistics to students who are inept or untrained in mathematics, a common response is to teach a course devoid of intellectual content. Because the teacher realizes that the students are incapable of understanding even the simplest formulas, the material is presented at the grade-school level. The alternative of teaching a serious, and possibly useful, statistics course which emphasizes non-algebraic aspects, is seldom considered.

With all these institutional impediments to the inclusion of a full range of topics important to statistical theory, it is not surprising that statistics courses are so narrowly mathematical in focus.

Conclusion

Most of the problems with the current attitudes in our society toward statistics can be traced to a single philosophical issue: Is statistics a specialty of mathematics, or is it a separate discipline? Surely the discipline of statistics includes many ideas of mathematics, but also of science and scientific method, psychology of perception, and psychology of learning, communication modes, information management, and many miscellaneous principles having little to do with mathematics per se. It is very helpful to teachers, learners and users to think of statistics as a discipline distinct from mathematics.

The treatment of statistics as a discipline can make a big difference to the effectiveness of teaching in a university or college. Evaluation of faculty can be based on contributions to statistics rather than to mathematical statistics. Statistical consulting would be deemed an important activity. Teaching would gain new importance as the way to change attitudes toward the subject, and increase the usefulness of the subject.

The institutional framework for instruction in statistics must be changed to ensure the future effectiveness of the discipline. There must evolve a context for the teaching of statistics that recognizes the importance of this discipline to both science and social science, and also recognizes its differences from mathematics. Only then will the dismal view of statistics begin to be dispelled. There may well be a day in which statisticians are society's heroes. But we have a long way to go. ■

References

1. Nelder, J.A. Statistics, Science and Technology, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 149: 109-121, 1986.
2. Weldon, K.L. *On teaching the non-algebraic aspects of statistics*. Research Report No. 86-11. Department of Mathematics and Statistics, 1986.
3. Zidek, J. V. *Statistification: the quest for a curriculum*. Technical Report. Department of Statistics. University of British Columbia. September, 1986.

La statistique est-elle une branche des mathématiques ou une discipline distincte?

par K. L. Weldon

Département de mathématiques et de statistique, Université Simon-Fraser

Introduction

À l'occasion du discours présidentiel qu'il prononçait récemment devant la Royal Statistical Society, John Nelder s'exprimait en ces termes:

"Les statisticiens prétendent qu'ils s'intéressent aux aspects théoriques et pratiques de la science et de la technologie. Si cette prétention est légitime, il convient de se demander pourquoi tant de technologues et de savants demeurent sceptiques vis-à-vis de l'apport concret de la statistique à l'exercice de leur profession".

Pour sa part, James V. Zidek profitait du deuxième congrès international sur l'enseignement de la statistique pour nous rappeler qu'un bon nombre des méthodes statistiques les plus importantes ont été conçues par des chercheurs spécialisés dans d'autres disciplines que la statistique, et que cette source d'enrichissement est encore très féconde aujourd'hui. Lors de son allocution d'ouverture, Zidek disait:

"Tout ceci m'amène à envisager très concrètement la possibilité que la statistique disparaisse un jour en tant que discipline distincte. Elle pourrait fort bien retourner à ses sources primordiales, les sciences appliquées, où elle continuerait comme jadis de grandir au gré des applications, servie par une armée d'utilisateurs plutôt que par une petite troupe de statisticiens. Il nous incombe à tous de résister à ce mouvement qui sonnerait le glas de notre profession. Nous pourrions commencer par faire preuve de plus de souplesse dans l'élaboration de nos programmes".

Ces propos de Nelder (1986) et de Zidek (1986) étayaient la thèse de cet article, à savoir que la statistique est mal aimée, sous-utilisée, et que cet état de choses est imputable au choix traditionnel de la matière dont nos cours se composent. Je voudrais exposer ici les motifs qui sous-tendent mon raisonnement et suggérer quelques correctifs. À mon avis, la statistique mérite d'être traitée comme une discipline à part entière, encore que nous ayons beaucoup de chemin à faire avant d'atteindre cet objectif.

La statistique a mauvaise presse

Tentons de mieux cerner la perception que l'on se fait de la statistique en imaginant les résultats de l'enquête suivante: on demande à tous les professeurs d'une université de choisir la discipline qu'ils trouvent la plus intéressante, à l'exception de la leur. Combien d'entre eux choisiraient la statistique? Probablement

très peu. Nous pourrions aussi poser la question à des ingénieurs, des hommes de science, des criminologues et des infirmières. Y en a-t-il beaucoup parmi eux qui apprécient à sa juste valeur l'influence de la pensée statistique? Parions que plusieurs d'entre eux considèrent que la statistique est un mal nécessaire, qu'elle est ennuyeuse, truffée de mathématiques inintelligibles et farcie de conclusions reposant sur des calculs numériques énigmatiques. Avouons-le: la valeur pratique de notre enseignement est constamment mis en doute, même par ceux qui, sans appartenir à la profession, en ont une bonne connaissance. De fait, cette opinion est si largement répandue que plusieurs d'entre nous semblent résignés à subir cette situation. Si cette description vous semble exagérée, posez-vous plutôt les questions suivantes:

1. Les chercheurs qui viennent vous consulter pour la première fois s'attendent-ils à ce que vous les assistiez dans leur recherche ou veulent-ils plutôt que vous légitimiez les conclusions auxquelles ils sont déjà arrivés?

2. Statisticiens mis à part, combien de diplômés universitaires considèrent que leurs cours de statistique ont été utiles et intéressants?

3. Avez-vous déjà entendu dire qu'un homme d'affaires voulait consulter un statisticien avant de prendre une décision importante? Quand les fondés de pouvoir ressentent-ils le besoin de faire appel à une analyse de données avant de prendre une décision?

4. Supposons qu'un groupe de gens instruits décide de mener une enquête auprès des membres de leur association dans le but de déterminer les orientations du programme de l'année suivante. Combien d'entre eux estimeront que la planification de l'enquête et l'analyse des données doivent être confiées à un statisticien?

Selon toute vraisemblance, la plupart de ces personnes auront suivi au moins un cours de statistique et auront vite fait de développer du dédain ou du mépris pour ce sujet. Nous devrions être scandalisés de leurs réactions! Pourquoi ces gens-là font-ils des mains et des pieds pour esquiver la statistique, alors qu'elle a des ramifications dans presque toutes les sphères du savoir, qu'elle a passionné tant de génies scientifiques, qu'elle ouvre des perspectives d'emploi presque illimitées de par le monde et que la survie de l'industrie moderne en dépend?

La statistique ne souffre-t-elle que d'un problème d'image?

Si la mauvaise réputation de la statistique n'était qu'un problème de perception, nous pourrions sans doute feindre de l'ignorer en attendant patiemment que le public réalise qu'il est dans son tort. À défaut, nous pourrions songer à engager une pléthore d'experts en relations publiques. Hélas, ce manque de popularité est en fait le reflet d'une sérieuse carence dans notre façon d'enseigner la statistique. À l'origine de ce problème se trouve la conception erronée que la statistique est une branche des mathématiques, une spécialité qui repose avant tout sur la connaissance des mathématiques, une simple application des mathématiques. Au contraire, la statistique est une discipline distincte qui s'inspire profondément de la méthode scientifique et dont la mathématique n'est qu'un des nombreux outils intellectuels auxquels elle fait appel pour clarifier et résoudre ses problèmes. Considérer la statistique comme une application des mathématiques, c'est alimenter les problèmes de perception dont nous parlions tout à l'heure. Bien plus, c'est inciter et conditionner les statisticiens à limiter en ce sens leur enseignement de la discipline.

À la limite, enseigner la statistique d'un point de vue purement mathématique équivaut à en trahir l'esprit. C'est un crime que de passer sous silence les nombreux éléments non-mathématiques qui constituent la base d'une partie de sa théorie. De là découle le manque de compréhension généralisé de la valeur pratique des méthodes statistiques.

Quelle est l'importance des concepts non-algébriques en statistique?

J'ai donné ailleurs (Weldon, 1986) quelques exemples de concepts non-algébriques dont le rôle en statistique est tout aussi important que les notions de fonction génératrice des moments, d'intervalle de confiance ou de test de Student, pour ne nommer que celles-là. Mentionnons à titre d'illustration une liste de questions auxquelles devrait savoir répondre tout finissant ayant complété un cours de niveau intermédiaire en statistique:

1. Nommer des critères permettant de justifier une hypothèse d'indépendance, de linéarité ou de normalité.

2. Décrire en vos propres mots une situation typique dans laquelle le paradoxe de Simpson pourrait induire un analyste en erreur. Même question à propos de la régression vers la moyenne.

3. Qu'est-ce qui distingue un schéma d'expérience à partir duquel on peut déduire l'existence d'un lien causal, et un autre qui ne permet de discerner que la présence d'une association entre les variables?

4. Quelle est la caractéristique d'une distribution que seule la moyenne permet de mesurer? Même question en ce qui concerne l'écart-type et le coefficient de corrélation. Exprimer votre réponse en des termes qui puissent rejoindre un non-initié.

5. Dans le contexte d'un test d'hypothèse, quels sont les liens logiques qui existent entre l'information à priori, le seuil critique du test, la taille de l'échantillon, le motif de l'analyse et les conclusions qu'on en tire?

6. Comment fait-on pour savoir si on doit résoudre un problème statistique au moyen d'une analyse de données, d'un test d'hypothèse, d'une estimation ou d'une combinaison de ces méthodes? Dans quelles circonstances l'approche bayésienne est-elle la plus indiquée?

Ces questions sont des exemples typiques d'une multitude de concepts non-algébriques qui sont inhérents à la statistique, mais sur lesquels on élabore peu ou pas dans la plupart des cours et des manuels de statistique. Les professeurs de statistique qui ont une orientation mathématique répondent souvent que ces questions sont trop sophistiquées pour qu'on puisse les aborder dans un cours de base, et que de toute façon les étudiants doivent d'abord apprendre à faire des tests de Student. Mais est-ce bien raisonnable? À quoi bon savoir comment faire un test de Student si on ne sait pas quand avoir recours à un test d'hypothèse (de Student ou autre), ni quel test employer, ni même comment l'interpréter? Il est sûrement plus important de savoir quand appliquer tel ou tel test plutôt que de mémoriser la marche à suivre pour se servir d'un test particulier. D'ailleurs, les étudiants qui ne se destinent pas à une carrière en statistique auront probablement plus de facilité à saisir les notions non-mathématiques. Il est certes plus facile, et surtout plus pertinent, de se familiariser avec le raisonnement logique qui sous-tend la démarche plutôt que d'apprendre à faire un test de Student. Pourquoi donc les bouquins élémentaires de statistique ne tiennent-ils aucun compte de cela? J'ai tendance à croire que c'est parce que les professeurs s'imaginent que les problèmes non-mathématiques n'ont rien à voir avec un cours d'introduction à la statistique justement parce que ces problèmes ne sont pas de nature mathématique.

Les concepts non-mathématiques n'ont-ils leur place que dans les cours de service?

La formation traditionnelle d'un statisticien est avant tout axée sur les mathématiques, y compris les aspects mathématiques de la statistique; c'est présumément sur le marché du travail qu'il se familiarise

avec les concepts non-mathématiques. Dans un passé pas si lointain, il est vrai que l'on ne pouvait acquérir les rudiments d'une profession qu'en travaillant comme apprenti. Toutefois, nous reconnaissons aujourd'hui l'efficacité d'une solide formation académique. S'il est vrai qu'une telle formation ne peut pas être complète, je doute fort qu'il soit préférable d'approcher les concepts non-mathématiques de la statistique en dehors du milieu scolaire. Une fois que l'on a saisi la philosophie des tests d'hypothèse, disons dans le contexte d'un test du signe ou d'un test normal par exemple, est-il si difficile de prendre un livre pour se renseigner sur le test de Student? Il me semble que les notions non-mathématiques qui font partie de la statistique devraient être enseignées dans les premiers cours, qu'il s'agisse d'un cours de service ou de concentration.

Si certains professeurs de statistique négligent les aspects non-mathématiques de la statistique, c'est possible parce qu'ils s'imaginent que ces questions ne font pas vraiment partie de leur discipline. Toutefois, il semble improbable que des professeurs de statistique qui possèdent de l'expérience en consultation ajoutent foi à cette croyance. La plupart des consultants savent que des questions du genre "la corrélation n'implique pas nécessairement un lien de cause à effet" jouent un rôle de premier plan en statistique. Il y a d'autres explications possibles à ce phénomène, qui sont plus plausibles celles-là:

1. De fortes pressions institutionnelles incitent les professeurs à se concentrer sur les aspects algébriques du sujet au détriment des concepts "mous".

2. La formation d'un professeur de statistique inclut habituellement une forte composante de mathématiques et l'apprentissage des notions non-algébriques y est déficient.

3. Les revues de statistique les plus prestigieuses exhortent à publier des articles dont le contenu est aussi mathématique que possible. Il y a peu de place dans ces revues pour de la spéculation ou des commentaires concernant l'interprétation ou la valeur des résultats.

4. Les notions non-mathématiques qui interviennent en statistique se prêtent assez mal à examen. Même les professeurs qui consacrent beaucoup de temps à expliquer les circonstances dans lesquelles l'hypothèse d'indépendance est justifiée, pour prendre un exemple, osent rarement poser une question à ce sujet à l'examen.

5. Lorsqu'on demande à un mathématicien d'enseigner la statistique à des étudiants qui ont une formation inadéquate dans ce domaine, sa réaction est souvent de donner un cours dépourvu de contenu intellectuel. Le professeur présente la matière comme s'il enseignait à l'école primaire parce qu'il réalise que les étudiants sont incapables de comprendre les formules même les plus élémentaires. On considère rarement la possibilité de donner un cours de statistique utile et sérieux mettant en relief les aspects non-algébriques du sujet.

Lorsque l'on prend conscience de tous ces obstacles institutionnalisés qui empêchent l'inclusion d'un large éventail de thèmes importants dans l'enseignement de la statistique, il n'est pas surprenant que nos cours de statistique aient un arrière-goût de mathématiques si prononcé.

Conclusion

La plupart des attitudes que notre société cultive vis-à-vis de la statistique peuvent se ramener à une seule question philosophique: la statistique est-elle une branche des mathématiques, ou est-elle au contraire une discipline distincte? Il est évident que la statistique a fait siennes de nombreuses idées mathématiques, mais elle s'inspire également de la science et de la méthode scientifique, de la psychologie de la perception et de l'apprentissage, des modes de communication et de gérance de l'information, ainsi que de plusieurs principes qui n'ont à peu près rien à voir avec les mathématiques. Il serait très salutaire pour les professeurs, les étudiants et tous les utilisateurs de la statistique de la percevoir comme une discipline distincte des mathématiques.

Traiter la statistique comme une discipline à part entière pourrait faire toute la différence quant vient le temps de l'enseigner efficacement dans un collège ou une université. On songerait peut-être enfin à évaluer la performance des professeurs en fonction de leur contribution à la statistique, et non seulement à la statistique mathématique. La consultation pourrait également prendre la place importante qui lui revient. L'enseignement jouerait alors un rôle nouveau et deviendrait le moteur d'un changement d'attitude à l'égard de la discipline et de son utilité.

Il faut que change le cadre institutionnel dans lequel évolue l'enseignement de la statistique de manière à assurer la maturation de notre discipline. Il faut que le contexte de l'enseignement de la statistique évolue pour que l'on réalise l'importance de notre discipline en sciences et en sciences sociales et que l'on en vienne à reconnaître en quoi elle se distingue des mathématiques. Alors seulement pourrions-nous conjurer le mauvais sort qui frappe notre profession. Il n'est pas impossible que les statisticiens soient un jour les héros de la société. Mais ce n'est pas pour demain la veille. ■

Références

1. Nelder, J.A. Statistics, Science and Technology, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 149:109-121. 1986.
2. Weldon, K.L. *On teaching the non-algebraic aspects of statistics*. Rapport de recherche no 86-11. Département de mathématiques et de statistique, Université Simon-Fraser.
3. Zidek, J. V. *Statistician: the quest for a curriculum*. Rapport de recherche. Département de statistique. Université de la Colombie-Britannique.